

Devoir à déposer au plus tard le 13/1/2011 dans le casier de A. Giannakos au secrétariat (autre possibilité : envoyer au plus tard le 13/1/2011 un fichier .pdf avec le devoir, à aristotelis.giannakos@u-picardie.fr).

Les devoirs sont individuels. Ne pas oublier de noter votre nom sur le document !

A.

Il y a deux joueurs : un vendeur (joueur 1) et un acheteur (joueur 2). Le vendeur dispose d'un bien à vendre, de qualité $q \in \{0, 1\}$. Le vendeur connaît la qualité du bien. L'acheteur sait seulement que $q = 0$ avec probabilité $2/3$ et $q = 1$ avec probabilité $1/3$. Le vendeur propose un prix de vente p à l'acheteur. L'acheteur accepte ou refuse. S'il accepte, les paiements sont de $p - q$ pour le vendeur et $2q - p$ pour l'acheteur.

1) Dans ce jeu, qu'est-ce qu'une stratégie pure du joueur 1 ? du joueur 2 ?

2) On veut montrer qu'il n'existe pas d'équilibre pur dans lequel des biens de qualité 1 sont vendus. Pour ce faire, on suppose par l'absurde qu'il en existe un. Soit p_q le prix proposé par le vendeur dans cet équilibre quand son bien est de qualité q . Les questions suivantes se rapportent au comportement des joueurs dans cet équilibre.

2a) Montrer que l'acheteur accepte les offres au prix p_1 .

2b) Montrer que $p_1 \geq 1$ et $p_0 \geq p_1$

2c) Montrer que si $p_0 > p_1$, alors l'acheteur refuse les offres au prix p_0 . En déduire que $p_0 = p_1$ et aboutir à une contradiction.

3) On suppose désormais que le vendeur, avant de faire une offre à l'acheteur, peut choisir d'obtenir (C) ou non (NC) un certificat de bonne qualité. Il peut obtenir ce certificat même si son bien est de mauvaise qualité, mais cela lui coûte alors plus cher. Plus précisément, le coût du certificat est de $c_0 = 3$ si $q = 0$ et de $c_1 = 1/2$ si $q = 1$.

3a) dans le jeu ainsi modifié, qu'est-ce qu'une stratégie pure du joueur 1 ? du joueur 2 ?

B.

On considère n individus qui partagent un bureau et qui doivent faire des efforts pour que le bureau reste propre. Chaque individu choisit un niveau d'effort x_i dans $\mathbb{R}_+^*$. Si chaque individu $i \in \{1, \dots, n\}$ fait l'effort x_i , la propreté du bureau est de $y = \ln \left(\sum_{j=1}^n x_j \right)$. L'utilité qui en résulte pour chaque individu est de $u_i = y - x_i^2/2$ (pour $i \in \{1, \dots, n\}$).

a) Déterminer les efforts socialement optimaux, c'est à dire le vecteur $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)$ qui maximise la somme des utilités des individus.

b) On suppose dans toute la suite que les efforts sont choisis de manière indépendante. Préciser le jeu sous forme stratégique associé.

c) Montrer que dans tout équilibre de Nash, les individus font tous le même effort. Déterminer l'ensemble des équilibres de Nash.

d) Comparer les efforts d'équilibre avec les efforts socialement optimaux. Commenter.

NB. Dans la terminologie utilisée en cours, les utilités s'appellent rémunérations et le vecteur x^* s'appelle situation.